La necesidad de los modelos para las relaciones en epidemiología

- Las epidemias involucran cambio de intensidades sobre el tiempo y el espacio en una población de plantas
- Dado que no se mide u observa cada uno de los individuos en una población, se deben usar **modelos** para representar o resumir el comportamiento de la población
- Más allá, en la epidemiología nosotros estamos particularmente interesados en relaciones (a nivel de poblaciones)
  - Los modelos son necesarios para resumir, en un sentido cuantitativo, las relaciones de interés

La necesidad de los modelos para las relaciones en epidemiología

Modelos:

- **Son una simplificación de la realidad**
- Un modelo es una abstracción de un fenómeno real o proceso que enfatiza aquellos aspectos relevantes para los objetivos impuestos de estudio
- Son usados para **describir, entender, predecir, comparar, comunicar** y hacer **inferencias** acerca de un fenómeno
  - Un modelo dado puede ser usado para uno o más de esas necesidades

Nota: el concepto general de un modelo es mucho más amplio que una **ECUACIÓN.**

De hecho, los modelos no necesitan ser una ecuación

Modelos

- **Modelos mentales**

  Es una imagen de cómo es imaginada/o algo que existe

- **Modelos tangibles**

  Es una imagen mental transformada en una forma explícita

  Mapas, diagramas de flujos, modelos físicos, ecuaciones

  - Usados para comunicarse y pueden ser tanto Físicos como Abstractos

  - **Modelos Físicos**

    Reproducen la forma o función de un objeto o sujeto real, escalado o simplificado (avión, ADN)

  - **Modelos Abstractos** (símbolos en sentido amplio)

    - **Cualitativos**

      (diagramas de flujos, gráficos,…..)

    - **Cuantitativos** (poseen reglas y anotaciones matemáticas)

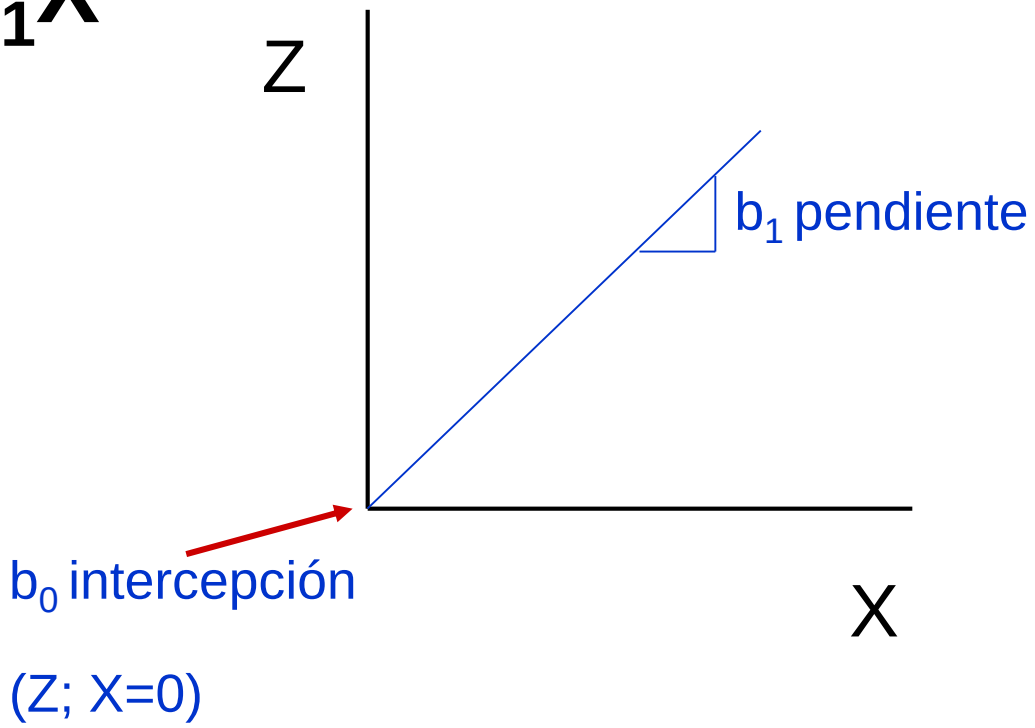
    - **Matemáticos**

      - **Estadísticos**

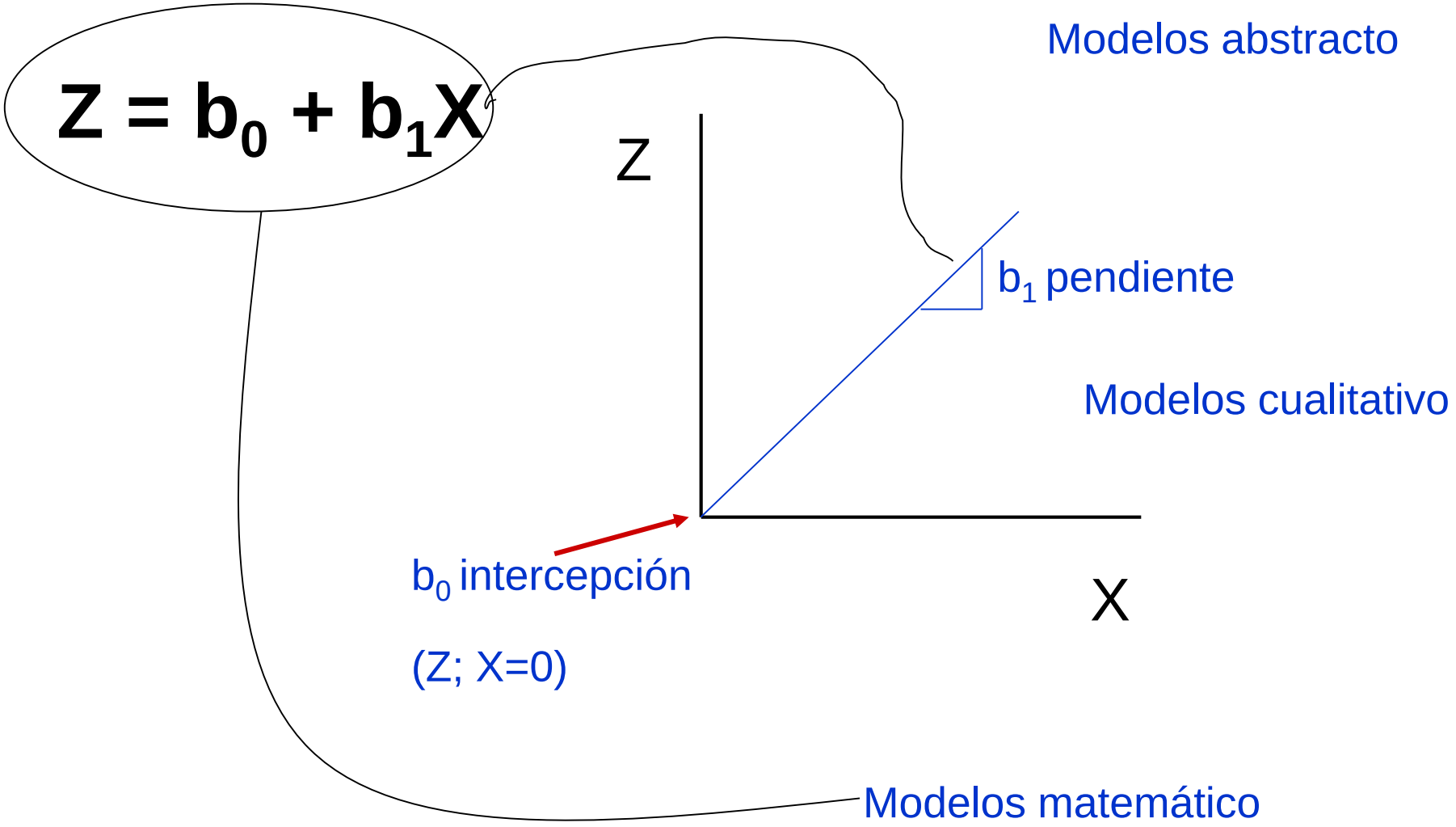
        (Son un tipo especial de modelos donde explícitamente se mide la aleatoriedad y la variación)

Modelo: esporas/lesiones (Z) en relación al área e la lesión (X)

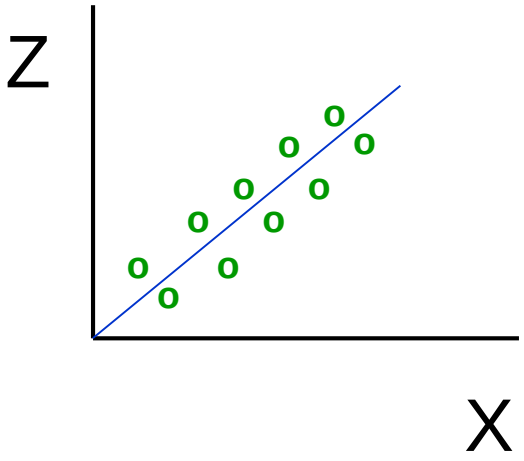
$$Z = b_0 + b_1X$$



Modelo: esporas/lesiones (Z) en relación al área e la lesión (X)



Modelo: esporas/lesiones (Z) en relación al área e la lesión (X)

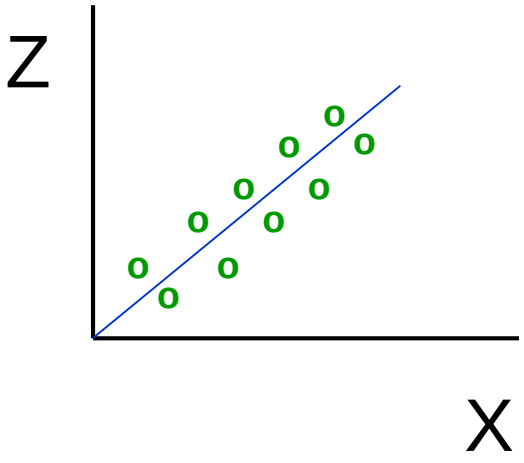


$$Z = b_0 + b_1X + e$$

e = "término error" que representa la variabilidad no explicada **"RUIDO"**

- Hay diferencia con el gráfico anterior
- Antes solo existía una línea sola
  - esto significa que por cada lesión de un tamaño dado, tiene un valor de esporulación igual y único
- Ahora, este gráfico muestra que para cada tamaño de lesión, hay un rango de valores posibles de esporulación
  - El "**valor central**" de esporulación se incrementa linealmente

Modelo: esporas/lesiones (Z) en relación al área e la lesión (X)



$$Z = b_0 + b_1X + e$$

e = "término error" que representa la variabilidad no explicada **"RUIDO"**

Modelo estadístico: consideración explícita de la variabilidad o aleatoriedad

- Sin *e*, Z es siempre la misma para cualquier valor dado de
  - Si X=10, b=0, b1=100
  - Z= 0 + 100*10 = 1000 esporas por cada lesión (no es algo probable)
- Se asume, estadísticamente, que *e* es una **variable aleatoria**
- **A menudo, se asume que *e* es normal con media 0 y varianza constante**

$$Z = b_0 + b_1X + e$$

- ***e*** representa a **todas** las variables (factores) que afectan a Z además de X
- La teoría estadística puede (a menudo) justificar el presupuesto de normalidad (porque muchas variables afectan Z, en general)
- Algunas veces (para algunas lesiones), Z será más **grande** que $b_0 + b_1X$, y otras será **menor** que $b_0 + b_1X$
  - Pero, en promedio, Z será igual a $b_0 + b_1X$
    - Esto es en consecuencia de la media igual 0 de *e*
- Por lo tanto el promedio, esperado, o media de Z es igual a $b_0 + b_1X$
  - Escrito como $E(Z) = b_0 + b_1X$
  - La esperanza es la media de la población
- **La línea está dada por $b_0 + b_1X$, (*valores esperados*) desviaciones de la línea dada por *e***

$$Z = b_0 + b_1X + e$$

$$E(Z) = b_0 + b_1X$$

- Estas son expresiones equivalentes para muchos modelos comunes estadísticos
- Este modelo es para una línea recta
- En el uso regular de modelos parecidos a éste (ej. En predicciones), el “error” no es usado directamente
  - Por lo tanto, se está prediciendo la media de Z a un valor dado de X
- Muchas relaciones no son descriptas por una línea recta
- Una forma más general de la expresión es:
  - **$Z = g(X) + e$, ó $E(Z) = g(X)$**
    - $g(x)$ es una anotación par alguna función de X
  - Esta expresión enfatiza que un componente aleatorio está en el modelo

Primero vimos $Z = b_0 + b_1X$

Conocido como un modelo determinístico, porque Z es completamente determinado por X (o sea que no existe aleatoriedad o variabilidad de Z a un valor dado de X)

Luego vimos $Z = b_0 + b_1X + e$

Componente determinístico del modelo estadístico

Componente estocástico (o aleatorio) del modelo estadístico

$$Z = b_0 + b_1 X + e$$

Variable respuesta o dependiente

Constantes (= **parámetros**), el cuál se estima a partir de los datos

Predictor o variable independiente

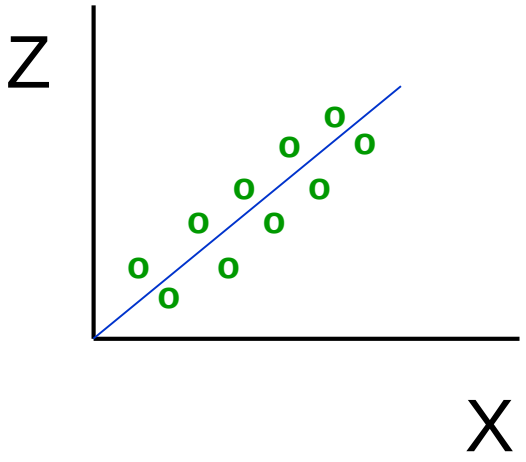
Término del error (variable aleatoria), con media = 0. A menudo se asume con distribución normal, todas las observaciones son independientes, y la varianza de esta variable es constante

$$\varepsilon \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$$

Una definición más refinada del modelo estadístico:

Modelo con componentes estocásticos (y pueden ser con otros componentes) conteniendo constantes desconocidas (parámetros) que son motivo de estimación

$Z = b_0 + b_1X + e$



- Se necesita estimar los parámetros (b´s)
  - –Se colocas “sombreros” a los datos estimados
- Aquí estamos interesados acerca de estimar aquellos basados en los datos disponibles (observaciones)
- La forma más común es a través de la regresión por **mínimos cuadrados**
- Para datos con distribución normal, esto es lo mismo que el **método de máxima verosimilitud**

$Z = b_0 + b_1X + e$

- **Regresión por mínimos cuadrados**
- Equivalente a encontrar **la mejor** línea a través de los puntos
- Considerar la diferencia entre la posible línea a un X dado y un dato
  - –Para la línea azul: Z=1000 a X=10, pero el **dato real es Z= 600**
  - –Para la línea roja: Z= 900 siendo lo más cercano a la observación; pero tiene un ajuste pésimo a lo largo de las Xs
- Se podría intentar un gran número de líneas y encontrar la de mejor ajuste

$$Z = b_0 + b_1X + e$$

- **Bondad del ajuste**

Se puede encontrar el total de la diferencias de cuadrados entre Z y Zi para cada “set” de estimación e parámetros (para cualquier línea)

El valor de parámetro que da el menor Q son los **Cuadrados Mínimos Estimados (CME ó LSE)**

El menor valor de Q es conocido como el **error de la suma de cuadrados (ESC ó SSE)**

Por suerte, esto se encuentra a través del cálculo (uno no tiene necesidad de intentar lotes de posibles líneas)

$$Z = b_0 + b_1X + e$$

$$\hat{Z} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1X + e$$

- No se necesita intentar todos los posibles parámetros: con la regla de los mínimos cuadrados, existe una solución única (obtenida por cálculo)
- Virtualmente todos los programas estadísticos generan análisis de la regresión usando este método
- Cuando se predice Z usando los parámetros estimados, se está prediciendo la respuesta media

Mínimos cuadrados ordinarios

- Un perfecto ajuste es cunado SCE=0 o CME=0
- Un ajuste pobre: alto SCE
- Una aproximación: calcular una medida relativa de los que el modelo explica
  - Calcular la variabilidad total alrededor de la media de Z (línea horizontal)
    - Esta es la línea de “no relación”
    - Es lo mismo que una línea con pendiente = 0
    - Se denomina a esto suma total de cuadrados (STC)

Mínimos cuadrados ordinarios

- SCT/SCE es la proporción de variabilidad de Z que **no** es explicada por el modelo
- Luego el R^2 = 1- SCE/SCT es la proporción de variabilidad de Z que **es** explicada por el modelo
  - Conocido como coeficiente de determinación
  - Varía entre 0 a 1 (ó 0 a 100%)
  - *R* (raíz cuadrada de R^2 es conocido como coeficiente de correlación
- Nota: SCE (o CME) también es la base para un test estadístico (un test de F) para determinar si hay una relación entre Z y X
- Los parámetros de desviaciones estándar estimadas: Función de CME

$$Z = b_0 + b_1X + e$$

$$\hat{Z} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1X + e$$

$$\hat{Z} = b_0 + b_1X + e$$

- Nota: Como una situación teórica de una línea conocida (0modelo conocido con parámetros conocidos), la línea ajustada (= modelo con parámetros estimados) no necesariamente corre a través de cada punto
- Para una línea ajustada, la diferencia entre la observación y la línea es el residual (*e*)
- *e* es una estimación de ε