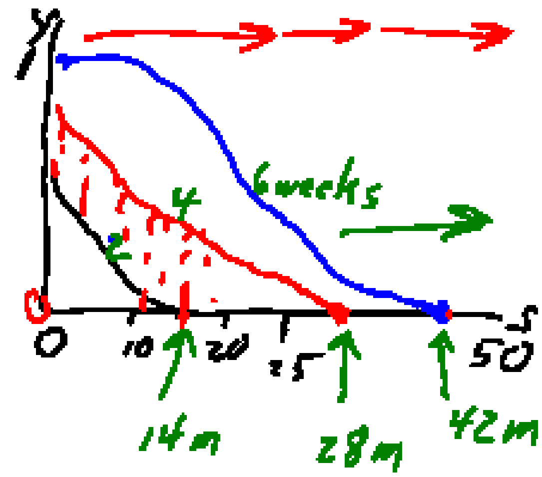
Análisis espacial de epidemias: Gradientes de enfermedad

- **Revisión:**
- Dos modelos para *Y(s), y(s)*: exponencial y potencial (modificado)
- Con un límite en *Y* (o un límite en *y*=*Y/N*), hay que incorporar *1-y* dentro de la ecuación diferencial
    - Exponencial ----→ Logístico *logit(y):s*
    - Potencial --→ Potencial-logístico (o log logístico) *logit(y):ln(s)*
    - En este caso, “logit” no significa policíclica
- Compara gradientes a través del cambio de b. y A. (o a.)
- A menudo de interés: cómo cambian los gradientes sobre el tiempo
    - En particular, cambia *b.* con el tiempo?
- El próximo paso: una caracterización formal de la dinámica espacio-temporal

Gradientes y tiempo

- La comparación es igual para ambos gradientes
  - o se puede usar t-test para comparar b en dos tiempos
- Esto implica una dinámica **espacio-temporal**
  - o **Cuán rápido una enfermedad se disemina a través del tiempo**
- Consideremos el gráfico [(y(s) observada]
  - Gradientes a tres tiempos
  - Se determina la distancia más lejana desde la fuente
- La velocidad de diseminación está dada por $\Delta s/\Delta t$

$\Delta s/\Delta t = (28\text{-}14)/(4\text{-}2) = 14/2 =$ 7m/semana = 1m/días



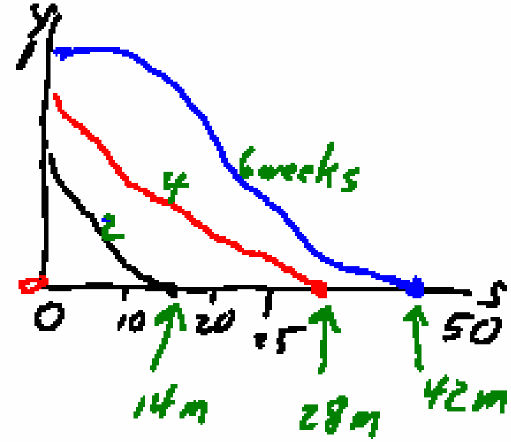
t (semana)	s (m)
2	14
4	28
6	42

Gradientes y tiempo

- $\Delta s/\Delta t = (28-14)/(4-2) = 14/2 =$ 7m/semana = 1m/días
- Asumiendo que la velocidad no cambia, podemos asumir un modelo lineal
  - o s = $(\Delta s/\Delta t)t$ [s=m/día).día)

pendiente

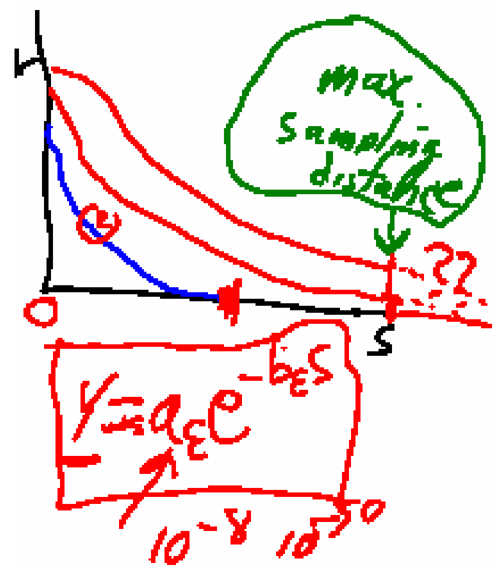
- Se puede predecir el frente de la epidemia en un momento dado
  - o a t = 52 sem (1 año), s = 7.52=364 m
- Determinar el tiempo cuando la enfermedad alcance cierta distancia
  - o 1 km (=1000 m) se alcanza cuando:
  - o 1000 = 7.t
  - o o, t = 1000/7 = 142.9 semanas



t (semana)	s (m)
2	14
4	28
6	42

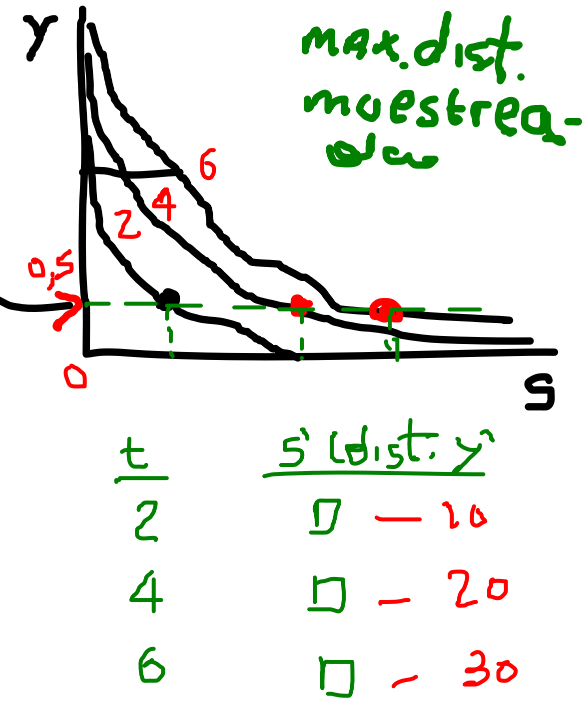
Problemas potenciales con esta aproximación

- Es muy difícil conocer la ubicación del frente (la distancia más lejana a la fuente en un momento dado donde hay un individuo enfermo)
  - o Errores de muestreo (individuos enfermos perdidos). Cero no significa que no exista enfermedad
  - o El frente puede fácilmente estar más allá de la distancia más lejana muestreada. Aunque el frente puede ser observable al principio de la epidemia, puede ser imposible cuantificarlo más tarde
- Los modelos estándar para gradientes, siendo determinísticos en su forma, especifican que y no puede ser cero a cualquier distancia (pero posiblemente muy cerca de 0)
  - o los modelos estocásticos (para individuos discretos) no tienen este problema, pero son mucho más complicados para usar



Aproximación general

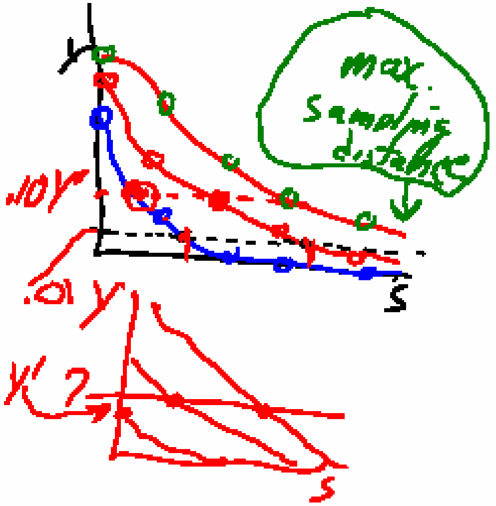
- Especificar un valor bajo de *y* (**y´**)
  - Ejemplo: *y*= 0.05
- Determinar la distancia de y´ para cada tiempo (s´)
  - Conocido como **"isopath"** (**línea de igual intensidad desde la fuente**)
- Calcular Δs/Δt basado en esas distancias
  - Ver a Madden et al. (1990) Phytopathology 80: 281-298 para un ejemplo en detalle



- **Nota:**
  - **Δs/Δt es la velocidad de una isopath en movimiento**
  - Δs/Δt puede depender de la y´ elegida
  - Δs/Δt puede depender del tiempo
  - Δs/Δt puede depender de distancia (es mayor cuando la distancia se incrementa)

Problemas potenciales remanentes cuando usando alguna y´(>0) para determinar Δs/Δt…….

- Puede que el valor de y´ elegido no se encuentre a un tiempo dado
- Es este caso, se debe emplear la interpolación
  - Solución aceptable
- Hay que probar para determinar sistemáticamente cómo afecta la distancia, y, o t a Δs/Δt



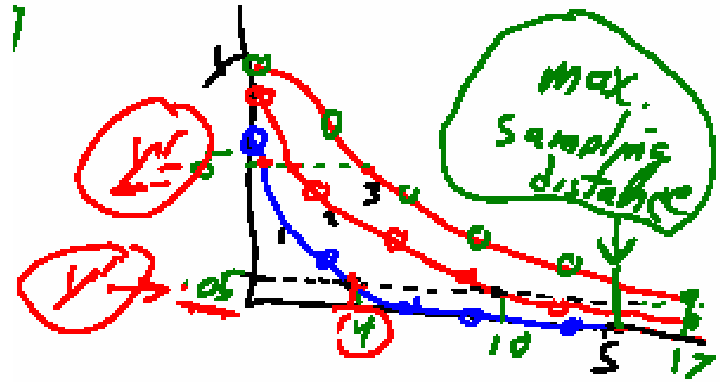
y´=0,05

t	s	Δs/Δt	
1	4		
2	10	(10-4)/1	´=6 m/día
3	17	(17-10)/1	´=7 m/día

y´=0,50

t	s´	Δs/Δt	
1	1		
2	2	(2-1)/1	´=1 m/día
3	5	(5-2)/1	´=3 m/día

Se necesita un camino más formal para caracterizar la diseminación, para tener un conocimiento general más ajustado del proceso

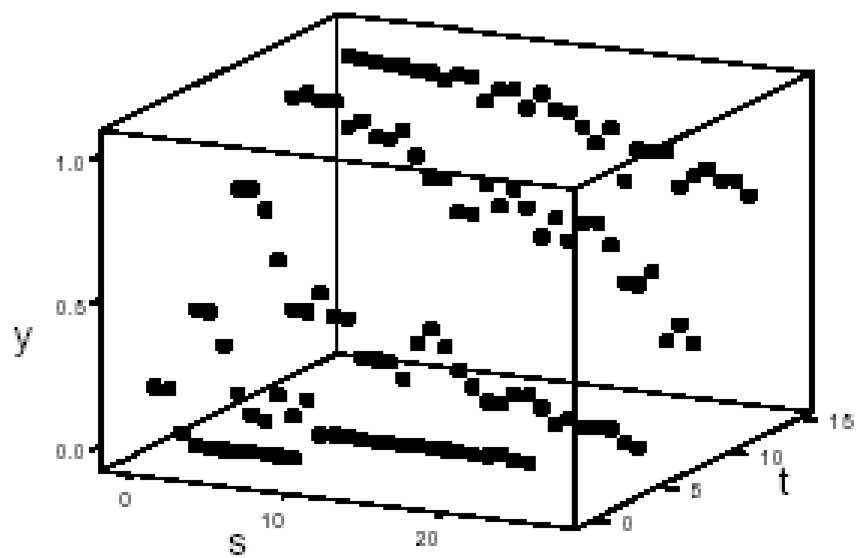


- Aquí la velocidad (Δs/Δt) es mayor con el tiempo y es mayor para valores de y chicos
  - - *y* chicas son de más interés para estos cálculos
- Dependencia de Δs/Δt sobre la distancia también podría dar este resultado
-

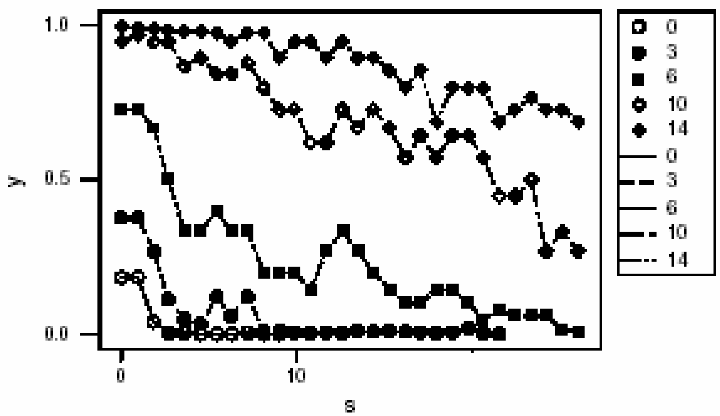
Dinámica espacio-temporal de la enfermedad

- <u>Consideraciones:</u>
  - ***y(s,t)*** es la intensidad de la enfermedad al tiempo <u>*t*</u> y distancia <u>*s*</u>
  - El incremento en y sobre el tiempo, promedia (o totaliza) a través de todas las distancias, es típicamente de la forma monomolecualar o logística
  - A un s simple, y también está bien caracterizado con un modelo temporal común y(0,t) ó y(2,t), etc.
  - A un t simple, y también está bien caracterizado por una logística o potencial-logística, o a un modelo de gradientes similar (exponencial o potencial a y pequeña) – y(s,0) o y(s,7) o y(s,14), etc.
- Se pueden construir gráficos en 3-D de y(s,t)
  - Se <u>puede</u> modelar el incremento en *y* a lo largo del tiempo a <u>cada</u> distancia *s*, y el declinamiento de *y* con la distancia a *cada* valor de *t*

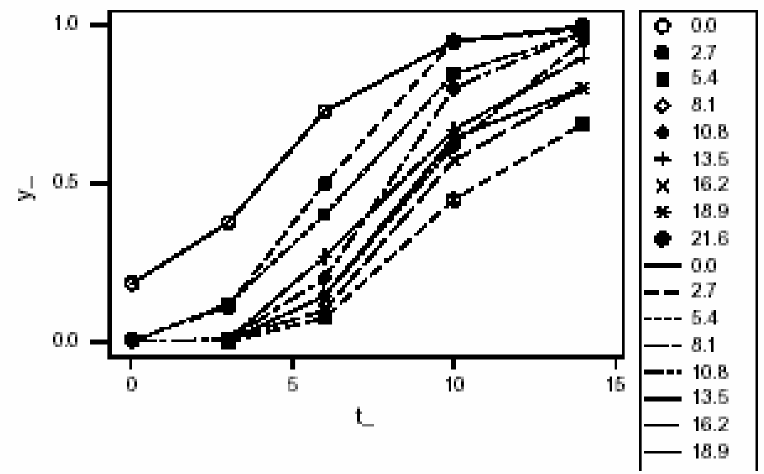
Tizón tardío de la papa en NewYork (Mingoue y Fry. 1963. Phytopathology 73:1173-1176)

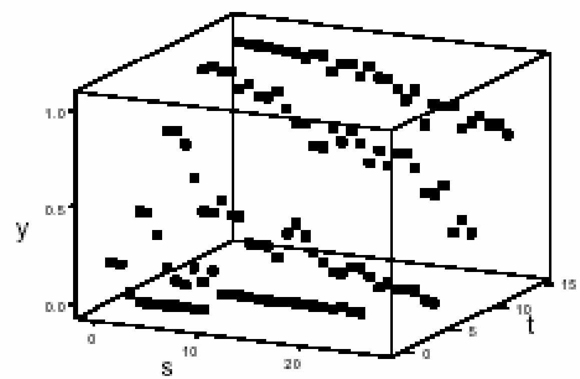


Gradiente tipo logístico



Curva de progreso de enfermedad tipo logístico





- Ahora, representemos la intensidad d e la enfermedad con un modelo para y como una función de tiempo y espacio
  - ***y(s,t) = f(s,t; parámetros)***
  - Es una expresión muy complicada, sin posible solución analítica
  - Una aproximación general será mencionada al final
  - Muchas epidemias se comportan de forma tal que permiten el uso de modelos relativamente simples

$y(s,t) = f(s,t;\ parámetros)$

- Hay <u>dos</u> variables independientes, *s* y *t*
  - o Necesitamos siempre considerar tasas de cambio con tiempo y distancia
  - o Ya que hay más de dos variables, las tasas están representadas como derivadas parciales (δZ/δX, no dZ/dX)
  - o δy/δt= …?; δy/δs= …? : esto es lo que queremos conocer
- En particular, vamos a considerar aquí versiones de *f(s,t; parámetros)* que pueden ser escritas omo una ecuación simple, la cual corresponde a derivadas parciales que sabemos que son razonables o apropiadas para análisis puramente espacio-temporal
- Algunas opciones obvias [con K=1, sin crecimiento del huésped; proporciones (y)]
  - o $\delta y/\delta t = r_L y(1-Y)$ **ó** $\delta y/\delta t = r_M(1-y)$
  - o $\delta y/\delta s = -b_L y(1-y)$ **ó** $\delta y/\delta s = -b_{PL} y(1-y)/s$

Como si otra variable no estuviera

$$Z = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_1} = b_1 \qquad \frac{\partial Z}{\partial X_2} = b_2$$

$$\boxed{\frac{\partial Z}{\partial b_1} = X_1}$$

- **Consideremos la siguiente combinación (con y para y(s,t)):**

  $\delta y/\delta t = r_L y(1-Y)$

  $\delta y/\delta s = -b_L y(1-y)$
- **Solución logística o logística - logística**

son iguales

$$y = \frac{1}{1 + A_{LL}\exp(b_L s - r_L t)}$$

$$y = \frac{1}{1 + \exp(\ln(A_{LL}) + b_L s - r_L t)}$$

$$y = \frac{1}{1 + \exp\left(-\ln\left(\frac{y_0}{1-y_0}\right) + b_L s - r_L t\right)}$$

A_{LL}:
Constante integración:
$(1-y_0)/y_0$

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = \ln\left(\frac{y}{1-y_0}\right) - b_L s + r_L t \qquad \ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = -\ln(A_{LL}) - b_L s + r_L t$$

- **Logística-logística**

  $\delta y/\delta t = r_L y(1-Y)$

  $\delta y/\delta s = -b_L y(1-y)$

  Solución (logística; o logística-logística) – linearizada:

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = -\ln\left(A_{LL}\right) - b_L s + r_L t$$

A_{LL}: $(1-y_0)/y_0$

A_{LPL}: $(1-y_{10})/_{y10}$

- **Logística potencial logística**

  $\delta y/\delta t = r_L y(1-Y)$

  $\delta y/\delta s = -b_{PL} y(1-y)/s$

  Solución (logística-potencial-logística) – linearizada:

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = -\ln\left(A_{LPL}\right) - b_L \ln\left(s\right) + r_L t$$

- **Resultado general: *$y^* = A^* - b.s^* + r.t$***

- Muchas otras combinaciones de ecuaciones derivadas parciales son posibles, en principio
- Pero otras combinaciones no tienen soluciones analíticas, o no pueden ser linealizadas
- Esto no significa que las dinámicas espacio-temporales pueden ser solamente caracterizadas por combinaciones restringidas de ***δy/δt*** ó **δy/δs**
    - De hecho, la realidad puede ser mucho más complicada que lo que tenemos aquí con estos modelos
    - Sin embargo, cuando ciertas combinaciones parece ser apropiadas, es posible obtener descripciones de epidemias muy útiles

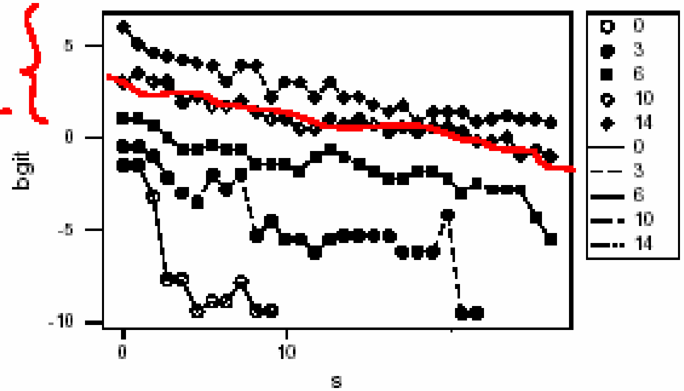
Trabajando con modelos temporo-espaciales

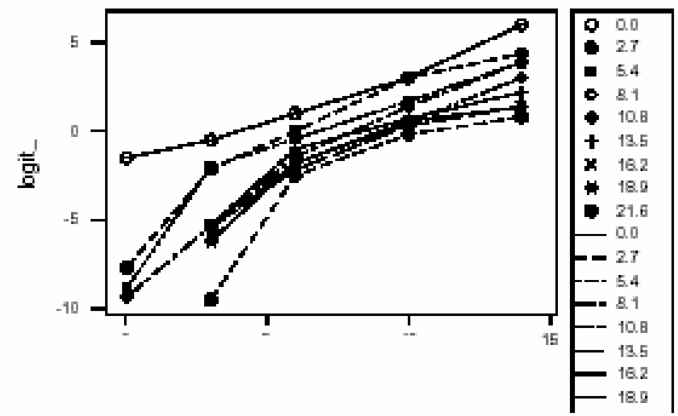
- Usar métodos de evaluación de modelos para modelos puramente temporales o espaciales de epidemias
  - o Para gradientes a tiempos seleccionados
  - o Para curvas de progreso de enfermedades a distancias seleccionados
- Se puede realizar análisis de la regresión para aquellas distancias o tiempos seleccionados
- Quizás un aspecto aún mucho más importante: esta aproximación trabaja cuando hay un **único r_* para todas las distancias** y **un único b_* para todos los tiempos**
  - o Ejemplo:

$\delta y/\delta t = r_L y(1-Y)$ $\delta y/\delta s = -b_L y(1-y)$

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = -\ln(A_{LL}) - b_L s + r_L t$$

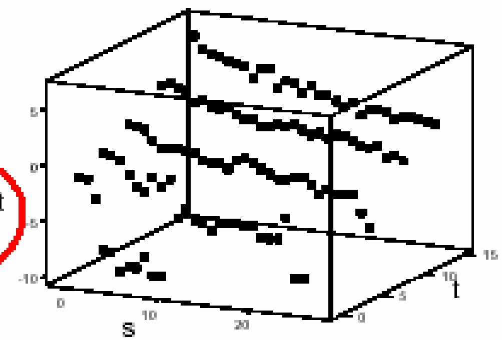
b_L



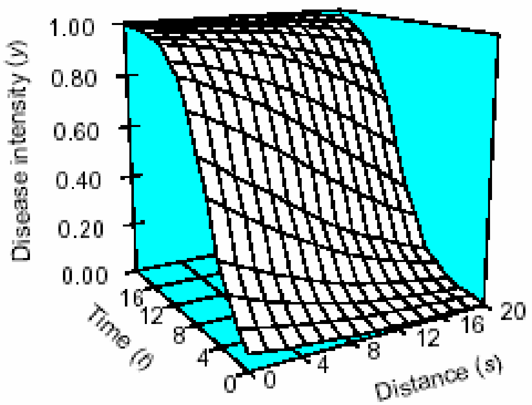


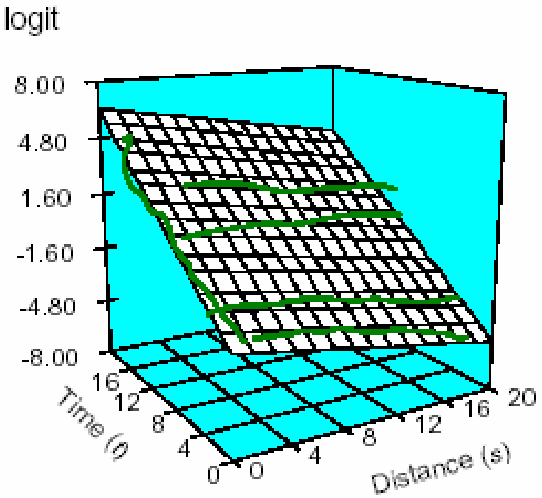
$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = -\ln(A_{LL}) - b_L s + r_L t$$

logit



logit=-2.705 -0.13s + 0.46t





$$\text{logit} = -2.705 - 0.13s + 0.46t$$

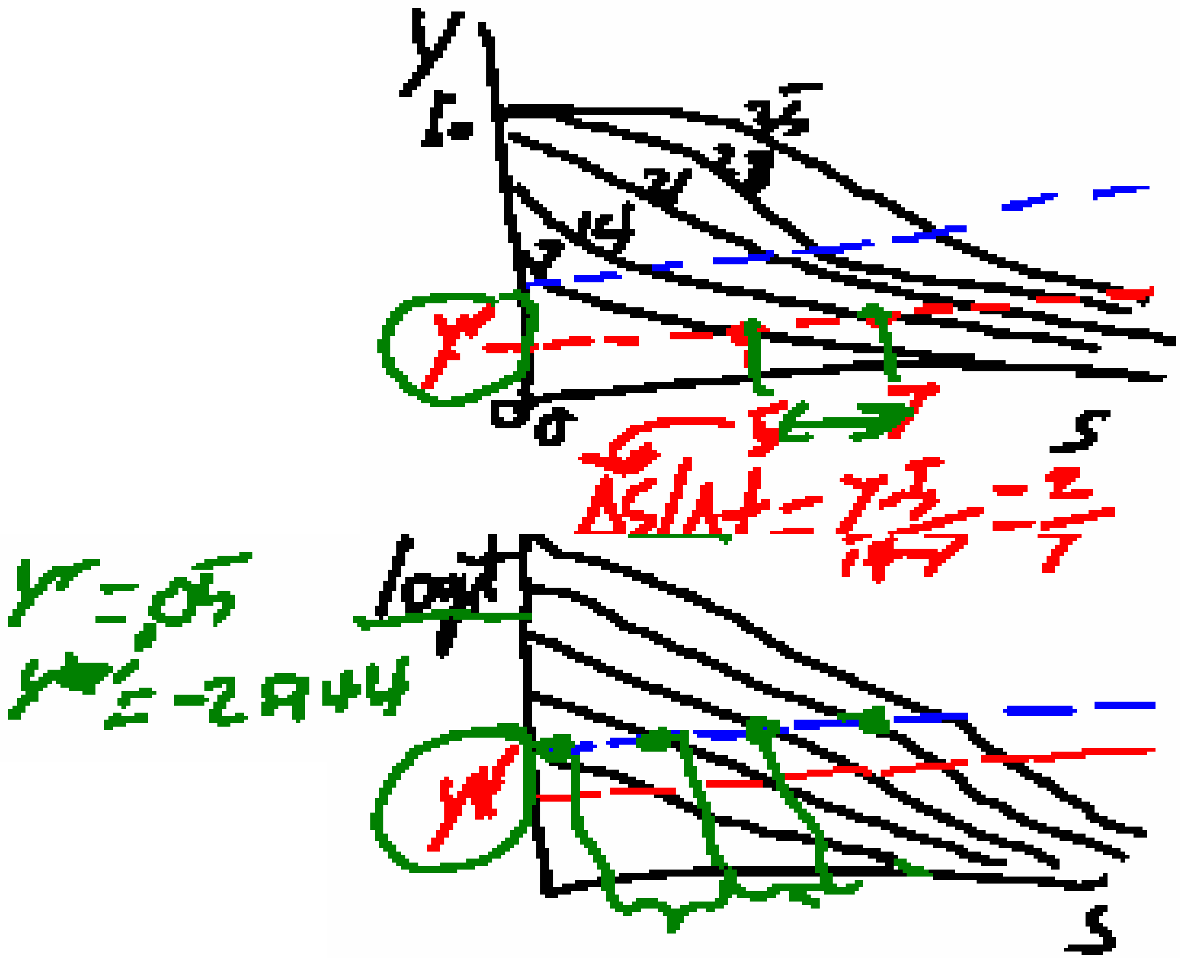
Trabajando con modelos temporo-espaciales

- Análisis de la regresión
  - Regresión lineal (dos variables de predicción) Regresión Múltiple
  - Regresión no lineal (dos variables de predicción)
  - Diagnóstico de "plots" de residuales

Velocidad de movimientos de isopath

- Asumir que se puede describir la intensidad de la enfermedad con:
  - *$y(s,t)=f(s,t;$ parámetros$)$*

    con derivadas parciales conocidas: $\boldsymbol{\delta y/\delta t}$, $\boldsymbol{\delta y/\delta s}$
  - Regresión no lineal (dos variables de predicción)
  - Diagnóstico de "plots" de residuales
- No importa si f(●) es fácil para trabajar o existe como una ecuación o está determinada a través de una integración numérica
- Se puede mostrar que: $\boxed{\frac{ds}{dt} : \frac{\Delta s}{\Delta t}}$
  - $\boldsymbol{\delta y/\delta t = -(\delta y/\delta t) / (\delta y/\delta s)}$
- La cantidad a ser estimada antes por interpolación y observación de "plots" es definida ahora en forma matemática. Si se tiene una representación de $\boldsymbol{\delta y/\delta t}$ y $\boldsymbol{\delta y/\delta s}$, luego se conoce la velocidad de la isopath



y/I0
35
28
21
14
7
0
s
y*
5
7
ΔS/Δt = (7−5)/(14−7) = 2/7
log t
s
y* = 0.5
y* = −2.944